

文章编号:1005-3085(2010)04-0699-05

由自相似集生成强分离图递归集的算法*

邓国泰¹, 刘春苔²

(1- 华中师范大学数学与统计学学院, 武汉 430079; 2- 武汉工业学院数理科学系, 武汉 430023)

摘 要: 本文讨论了由自相似集生成图递归集的算法。利用辅助函数迭代系, 针对压缩率为整数的倒数和数字集为有理数的自相似集, 给出了一个新的算法, 使得所生成的图递归集满足强分离条件。

关键词: 迭代函数系; 强分离条件; 图递归集

分类号: AMS(2000) 28A80

中图分类号: O174

文献标识码: A

1 引言

设 $|q| > 1$, $\{f_i(x) = q^{-1}(x + d_i)\}_{i=1}^N$ 为一族压缩函数系 (也称为迭代函数系 (IFS)), 则存在唯一的非空紧集 $T = T(q, \mathcal{D})$ —称之为 IFS $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的吸引子或自相似集—满足 $T = \cup_{i=1}^N f_i(T)$, 这里数字集 \mathcal{D} 为 $\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ 。称一个 IFS 或自相似集满足开集条件 (OSC) 如果存在一个开集 O 使得对于任意 i 有 $f_i(O) \subset O$, 且对于 $i \neq j$ 有 $f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset$ 。

对于自相似集^[1-3], 如果它不满足开集条件, 则计算它的分形维数 (Hausdorff 维数) 是很困难的。当它满足开集条件时其维数是 $\ln N / \ln q$, 但是如何判断一个 IFS 或自相似集是否满足开集条件又是另一件非常困难的事情, 即使一个 IFS 满足 OSC, 也很难寻找到 OSC 中的开集。由文献 [4] 的思想, 我们针对数字集 \mathcal{D} 为有理数的情形, 我们给出了一个新的计算 $T = T(q, \mathcal{D})$ 维数的方法, 该算法生成的图递归集满足强分离条件。据我们所知, 如果没有有理数的条件, 目前还没有一个一般的方法去计算 T 的维数。

定理 1 设 $D \subset \mathbb{Q}$ 且 $\dim T < 1$, 则存在满足强分离条件的图递归集 $\{T_i\}_{i=1}^n$, 使得 $T_1 = T(q, D)$ 。

2 满足强分离条件的图递归集

设

$$\left\{f_i(x) = \frac{1}{q}(x + d_i)\right\}_{i=1}^N$$

是一个以 $T = T(q, \mathcal{D})$ 为吸引子的 IFS, 其中 $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$, 并且 $q > 1$ 为整数。因为可以进行线性变换, 所以可以假定 $0 = d_1 < d_2 < \dots < d_N = q - 1$, 则对于任意 i , 有 $f_i([0, 1]) \subset [0, 1] := \Gamma$ 且 $0, 1 \in T$ 。

设 $G = (V, E)$ 为一个有向图, 这里 $V = \{1, 2, \dots, N\}$ 为顶点集, E 为有向边^[5]。一般假定每个顶点至少有一个出边, 对任意的 $e \in E$, 存在一个压缩率为 $\rho \in (0, 1)$ 的相似压缩映射 $f_e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 。符号 G^* 表示标识了相似映射 f_e 的有向图 G , 也称其为有向迭代函数

收稿日期: 2008-09-22. 作者简介: 邓国泰 (1976年1月生), 男, 博士, 讲师. 研究方向: 分形几何与小波分析.

*基金项目: 国家自然科学基金 (10771082; 10926126).

系(GIFS), 而图 G 称为 G^* 的基图. 令 $E_{ij} = \{e \in E : e \text{ 从顶点 } i \text{ 到顶点 } j\}$ 为所有从顶点 i 到顶点 j 的有向边, 则存在唯一的一个非空紧集列 $\{T_i\}_{i=1}^N$, 使得

$$T_i = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{e \in E_{ij}} f_e(T_j),$$

称这些集合 $\{T_i\}$ 为图递归集, 如果这些等式的右边并不交并, 则称该 GIFS 或者 $\{T_i\}$ 满足强分离条件(SSC). 显然当 V 仅含有一个顶点时, G^* 就退化为普通的 IFS.

记 $\Omega_N^k = \{1, 2, \dots, N\}^k$, $\Omega_N^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_N^k$, 约定 $\Omega_N^0 = \emptyset$. 如果 $I_1, I_2 \in \Omega_N^k$, 则 I_1, I_2 定义为词 I_1 和 I_2 的连接. 如果 $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \Omega_N^k$, 则记

$$f_I = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_k}, \quad d_I = d_{i_k} + A d_{i_{k-1}} + \dots + A^{k-1} d_{i_1},$$

约定 $f_{\emptyset} = \text{Id}$ 为恒等映射. Ω_q^k, Ω_q^* 也类似定义.

令 $I \in \Omega_N^k$, 记 $T_I = f_I(\Gamma)$, 同时定义 I 的邻域为

$$[I] = \{I' : \text{存在 } \{I_1 = I, I_2, \dots, I_n = I'\} \subset \Omega_N^k \text{ 使得 } \bigcup_{i=1}^n T_{I_i} \text{ 连通}\}.$$

下面我们利用归纳法从 $[I]$ 中构造一个子集 $U(I)$. 首先, 令 $I'_1 = \min\{I' : d_{I'} \leq d_L, L \in [I]\}$. 如果已经挑选了 I'_1, I'_2, \dots, I'_n , 则挑选第 $n+1$ 元 $I'_{n+1} = \min\{I' \in [I] : d_{I'_n} < d_{I'}\}$. 因为 $[I]$ 为有限集, 从而上述挑选在有限步完成步骤. 最后令 $U(I)$ 为所选元的并集. 显然, 对于任意的 $I, I' \in \Omega_N^*$, 要么 $U(I) = U(I')$, 要么 $U(I) \cap U(I') = \emptyset$, 且都有 $U(I) \subset [I]$.

令

$$\left\{g_i(x) = \frac{1}{q}(x+i-1)\right\}_{i=1}^q,$$

简单计算表明 $\Gamma = T(q, \mathcal{C}) = [0, 1] \supset T$, 这里 $\mathcal{C} = \{0, 1, \dots, q-1\}$. 注意到 $\{\Gamma_J := g_J(\Gamma) : J \in \Omega_q^k\}_{k=0}^{\infty}$ 形成 Γ 一个完全网剖分. 令

$$S_k = \{J \in \Omega_q^k : g_J(\Gamma^o) \cap f_I(\Gamma^o) \neq \emptyset, I \in \Omega_N^k\}, \quad S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

从文献[4]可知

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{J \in S_k} \Gamma_J.$$

不难验证对于任意 $J \in S_k, I \in \Omega_N^k$, 总有 $f_I(\Gamma^o) \cap g_J(\Gamma^o) \neq \emptyset \Leftrightarrow d_I - c_J \in (-1, 1)$. 符号 $\Delta(J)$ 定义为

$$\Delta(J) = \{d_I - c_J : I \in \Omega_N^k, f_I(\Gamma^o) \cap g_J(\Gamma^o) \neq \emptyset\}.$$

因为 \mathcal{D} 仅包含有理数, 集族 $\{\Delta(J) \neq \emptyset : J \in \Omega_q^*\}$ 为有限集, 简记其为

$$\{\Delta(J_0) := \Delta(\emptyset) = \{0\}, \Delta(J_1), \Delta(J_2), \dots, \Delta(J_m)\}.$$

令

$$\alpha(J, k) = \bigcup_{J' \in \Omega_q^k, JJ' \in S_{|J|+k}} \Gamma_{JJ'}$$

为 Γ_J 的 k 阶子区间. 以下命题很容易验证, 在此省略其证明.

命题1 对于任意 $J \in S$, 我们有 $\alpha(J, k+1) \subset \alpha(J, k)$ 且 $\bigcap_{k \geq 1} \alpha(J, k) = T \cap \Gamma_J$. 进一步, $T \cap \Gamma_J$ 的直径为正数.

命题2 对于任意 $J \in S$, 若 $\alpha(J, k)$ 不连通, 则 $\alpha(J, k+1)$ 不连通。

为了得到定理1的证明, 下面先证明几个引理。

引理1^[4] 如果 $\Delta(J) = \Delta(J')$, 则对于所有 $1 \leq j \leq q$, 有 $\Delta(J_j) = \Delta(J'_j)$ 。

引理2 若 $\dim T < 1$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{Q}$, 则存在常数 $N_1 > 0$, 使得任意 $J \in S$ 和 $k > N_1$, 有 $\alpha(J, k)$ 不连通。

证明 假设结论错误, 由命题2知, 存在 J 使得对所有 k , $\alpha(J, k)$ 连通。首先假定 J 取自

$$\{J_j := \min\{J : \Delta(J) = \Delta(L_j)\}\}_{j=0}^m.$$

这里的序是字典序。令 $a = \min(T \cap \Gamma_J)$, $b = \max(T \cap \Gamma_J)$ 。由命题1和集 $\alpha(J, k)$ 的连通性, 知 $[a, b] \subset T \cap \Gamma_J$, 所以 T 的维数不小于1, 这与 $\dim T < 1$ 矛盾。从而对于每个 $0 \leq j \leq m$, 均存在 k_j , 使得对于所有 $k > k_j$, 集 $\alpha(J_j, k)$ 是不连通的。令 $N_1 = \max\{k_j : 0 \leq j \leq m\}$, 则对所有 $k \geq N_1$, 集 $\alpha(J, k)$ 都是不连通的。其次, 假定 $J \in S$, 此时存在 j 使得 $\Delta(J') = \Delta(J_j)$ 。由于 $\alpha(J', k)$ 和 $\alpha(J_j, k)$ 是自相似的, 知当 $k > N_1$ 时, $\alpha(J', k)$ 不连通。

定义 J 的邻域

$$V(J) = \{J' : \text{存在 } \{J'_1 = J, J'_2, \dots, J'_n = J'\} \subset S_k \text{ 使得 } \cup_{j=1}^n \Gamma_{J'_j} \text{ 连通}\}.$$

记

$$T_{U(I)} = \bigcup_{I' \in U(I)} T_{I'}, \quad \Gamma_{V(I)} = \bigcup_{J' \in V(I)} \Gamma_{J'}.$$

引理3 若 $\dim T < 1$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{Q}$, 则存在常数 N_2 , 使得集 $V(J)$ 至多含有 N_2 个元素, 这里 $J \in S$ 。

证明 令 $N_2 = 3q^{N_1}$, 其中 N_1 由引理2所给出。假设结论错误, 则存在

$$V(J) = \{J'_1, J'_2, \dots, J'_k\},$$

使得 $k > N_2$ 。设 $|J|$ 的长度为 l 。注意到对于每个 $k > 0$, $\Lambda_k = \{\Gamma_J : J \in S_k\}$ 中的区间内部是没有重叠的。 $\Gamma_{V(J)}$ 的长度为 $kq^{-l} > 3q^{-l+N_1}$, 而对于任意的 $J' \in S_{l-N_1} \cap \Gamma_{J'}$ 的长度为 q^{l-N_1} , 从而由抽屉原则可知至少存在一个 $J' \in S_{l-N_1}$, 使得 $\Gamma_{J'} \subset \Gamma_{V(J)}$ 。令 $A = \{L \in V(J) : \Gamma_{J'} \cap \Gamma_L \neq \emptyset\}$, 由 $\alpha(J', N_1)$ 的定义知

$$\alpha(J', N_1) \supset \bigcup_{L \in A} \Gamma_L = \Gamma_{J'},$$

但这与 $\alpha(J', N_1)$ 不连通矛盾。

设 $E \subset \Omega_N^k$, 定义 $d_E = \{d_I : I \in E\}$, 同时定义 $\Lambda([I])$ 为 $\Lambda(E) = \{d_J - \min(d_E) : J \in E\}$, 显然 $\Lambda([I]) = \Lambda(U(I))$ 。下面我们证明集 $\{\Lambda(U(I)) : I \in \Omega_N^*\}$ 为有限集, 这样以其元素为顶点就可以构造一个图递归集来重构自相似集 T , 而且该图递归集满足强分离条件。

引理4 假设 $\dim T < 1$ 且 $\mathcal{D} \subset \mathbb{Q}$, 则集 $\{\Lambda(U(I))\}$ 为有限集。

证明 对于任意 $I \in \Omega_N^*$, 记 $k = |I|$, 存在 $J \in S_k$, 使得

$$[\min(T_{U(I)}), \max(T_{U(I)})] = T_{U(I)} \subset \Gamma_{V(J)} = \frac{[c_{\min(V(J))}, c_{\max(V(J))} + 1]}{q^k},$$

于是由引理3知

$$\Lambda(U(I)) \subset [0, c] \subset [0, q^{N_2}],$$

这里 $c = c_{\max}(V(J)) - c_{\min}(V(J))$ 。因为 d_i 都是有理数, 从而存在整数 p , 使得 $pD \subset Z$ 。因此 $p\Lambda(U(I)) \subset [0, pq^{N^2}] \cap Z$, 这就得到 $\#\{\Lambda(U(I)) : I \in \Omega_N^*\} \leq 2^{2pq^{N^2}+1}$ 。

引理 5 设

$$U(I) = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}, \quad (I') = \{I'_1, I'_2, \dots, I'_k\} \subset \Omega_N^{k_0},$$

记

$$d_{I_1} = \min(d_{U(I)}), \quad d_{I'_1} = \min(d_{U(I')}).$$

如果 $\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$, 则对于 $1 \leq m, n \leq k$ 和 $1 \leq i, j \leq N$, $T_{I_m i} \cap T_{I_n j} \neq \emptyset$, 等价于 $T_{I'_m i} \cap T_{I'_n j} \neq \emptyset$ 。进一步, 对于 $1 \leq m \leq k$, 均有 $d_{I_m i} - d_{I_1 1} = d_{I'_m i} - d_{I'_1 1}$ 。

证明 如果我们证明了前面的结论, 那么引理后面的结论就自然成立。因此我们只证前面的结论。注意到由 $\Lambda(U(I))$ 和 $\Lambda(U(I'))$ 的定义可以得到以下事实

$$d_{I_m} - d_{I_n} = (d_{I_m} - d_{I_1}) - (d_{I_n} - d_{I_1}) = (d_{I'_m} - d_{I'_1}) - (d_{I'_n} - d_{I'_1}) = d_{I'_m} - d_{I'_n},$$

再由 $\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$, 可知

$$\begin{aligned} T_{I_m i} \cap T_{I_n j} \neq \emptyset &\Leftrightarrow |d_{I_m i} - d_{I_n j}| \leq 1 \Leftrightarrow |qd_{I_m} + d_i - qd_{I_n} - d_j| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow |qd_{I'_m} + d_i - qd_{I'_n} - d_j| \leq 1 \Leftrightarrow T_{I'_m i} \cap T_{I'_n j} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

推论 1 设

$$U(I) = \{I_i\}_{i=1}^k, \quad U(I') = \{I'_i\}_{i=1}^k \subset \Omega_N^*.$$

如果 $\Lambda(U(I)) = \Lambda(U(I'))$, 那么

$$\#\{T_{U(I_m i)} : 1 \leq m \leq k, 1 \leq i \leq N\} = \#\{T_{U(I'_m i)} : 1 \leq m \leq k, 1 \leq i \leq N\}$$

且 $\Lambda(U(I_m i)) = \Lambda(U(I'_m i))$ 。

定理 1 的证明 利用引理 4 和推论 1 从 $\{\Lambda(U(I)) : I \in \Omega_N^*\} = \{\Lambda([I]) : I \in \Omega_N^*\}$ 中构造出一个满足定理要求的图递归集。因为 $\{\Lambda([I]) : I \in \Omega_N^*\}$ 是有限集, 从而其可记为 $\{\Lambda([I])\} = \{\Lambda([I_0]), \Lambda([I_0]), \dots, \Lambda([I_m])\}$, 这个被定义为基图的顶点

$$V = \{\Lambda(\{0\}) = \{0\}\} \cup \{\Lambda(U(I_i)) : 1 \leq i \leq k\} := \{v_0, v_1, \dots, v_m\}.$$

有向边 $E = \{E_{ij}\}_{i,j=0}^m$ 定义为

$$E_{ij} = \{\min(d_{U(I'_k)}) : \Lambda(U(I_j)) = \Lambda(U(I'_k)), I' \in U(I_i), 1 \leq k \leq N\}.$$

从推论 1 可知, 上述定义是合理的。显然如果 $j \neq j'$, 则 $E_{ij} \cap E_{ij'} = \emptyset$ 。

基图 $G = (V, E)$ 边 e 上的压缩映射定义为 $\phi_{ij}^e(x) = q^{-1}(x + e)$, 若 $e \in E_{ij} \neq \emptyset$ 。由文献 [3,4] 知, 可得唯一一个非空紧集列 $\{T_0 = T, T_1, \dots, T_m\}$, 满足

$$T_i = \bigcup_{j=0}^m \bigcup_{e \in E_{ij}} \phi_{ij}^e(T_j), \quad 0 \leq i \leq m.$$

而由 $\{T_i\}_{i=0}^m$ 的结构可知 GIFS $\{\phi_{ij}^e\}$ 满足 SSC。

3 算法和例子

从定理1可得如下算法。

1) $V_0 = \{0\}$, $k = 1$. 2) 令 $V_1 = \{\Lambda(I) : I \in \Omega_N^k\}$.

3) 若 $V_1 \setminus V_0 \neq \emptyset$, 则 $k = k + 1$, $V_0 = V_1$, 转2)。

4) 记 m 为 V_1 的长度, 对于 $1 \leq i, j \leq m$, 令

$$E_{ij} = \{\min(d_{U(I'k)} : \Lambda(U(I_j)) = \Lambda(U(I'k)), I' \in U(I_i), 1 \leq k \leq N\};$$

$$\phi_{ij}^e(x) = q^{-1}(x + e), \text{ 若 } e \in E_{ij} \neq \emptyset.$$

例1 设 $q = 5$, $\mathcal{D}_1 = \{0, 16/5, 4\}$, 则 $\{T_1 = T, T_2 = T \cup (T + 5/4)\}$ 为满足 SSC 的图递归集。

证明 按算法计算, 迭代二次可得顶点集为 $V = \{\{0\}, \{0, 4/5\}\}$, GIFS 为

$$\left\{ \phi_{11}(x) = \phi_{21}(x) = \frac{x}{5}, \phi_{12}(x) = \phi_{22}^1(x) = \frac{5x + 16}{25}, \phi_{22}^2(x) = \frac{5x + 32}{25} \right\}.$$

图递归集为 $\{T_1 = T, T_2 = T \cup (T + 5/4)\}$ 。此时由文献[1]可求得其维数为

$$\dim_H T_i = \frac{\ln(3 + \sqrt{5}) - \ln 2}{\ln 5}.$$

参考文献:

- [1] Ngai S M, Wang Y. Hausdorff dimension of self-similar sets with overlaps[J]. Journal of the London Mathematical Society, 2001, 63: 655-672
- [2] Das M, Ngai S M. Graph-directed iterated function systems with overlaps[J]. Indiana University Mathematical Journal, 2004, 53: 109-134
- [3] Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry[M]. Chichester: Wiley, 1997
- [4] He X G, Liu K S, Rao H. Self-affine sets and graph-directed systems[J]. Constructive Approximation, 2003, 19: 373-397
- [5] Mauldin R D, Williams S C. Hausdorff dimension in graph directed constructions[J]. Transaction of the American Mathematical Society, 1988, 309(2): 811-829
- [6] He X G. On the boundaries of self-similar tiles in \mathbb{R}^1 [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2006, 134(11): 3163-3170

An Algorithm to Generate Directed-graph Sets with the SSC from Self-similar Sets

DENG Guo-tai¹, LIU Chun-tai²

(1- College of Mathematics and Statistics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079;

2. Department of Mathematics and Physics, Wuhan Polytechnic University, Wuhan 430023)

Abstract: This paper discusses an algorithm to generate graph-directed sets from a self-similar set. Based on auxiliary iterated function systems, we give a new algorithm which can deal with a self-similar set whose compression ratio is a reciprocal of some positive integer and all entries of the digit set are rational numbers. Moreover, we prove that the generated graph-directed sets satisfy the strong separation condition.

Keywords: iterated function systems; strong separation conditions; directed-graph sets

Received: 22 Sep 2008. Accepted: 08 Oct 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771082; 10926126).